Επιχειρησιακή έρευνα

8/11

①

traveling salesman problem

N κόμβους.

d_{ij}

$N_j = \{2, 3, \dots, j-1, j+1, \dots, N\}$

$\hat{N}_j(i)$ είναι το σύνολο που περιέχει i στοιχεία του N_j

$f_i(j, \hat{N}_j(i))$: το μήκος της ελάχιστης απόστασης από τον κόμβο 1 στον j μέσα από ένα σύνολο από i ενδιάμεσους κόμβους $\hat{N}_j(i)$

$$f_i(j, \hat{N}_j(i)) = \min_{k \in \hat{N}(j)} \left\{ f_{i-1}(k, N_j(i) - \{k\}) + a_{kj} \right\}$$

Οριακή συνθήκη $f_0(j, -) = a_{1j}$

Βέλτιστη λύση $\min_{j=2,\dots N} \{ f_{N-2}(j, N_j) + a_{j1} \}$

Παράδειγμα

1) Ξεκινώντας από την πόλη 1 θέλω να επισκεφτώ και τις υπόλοιπες καταλήγοντας στην 1

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	3	1	5	4
2	1	0	5	4	3
3	5	4	0	2	1
4	3	1	3	0	3
5	5	2	4	1	0

$\boxed{i=0}$

$f_0(2,-) = a_{12} = 3$

$f_0(3,-) = a_{13} = 1$

$f_0(4,-) = a_{14} = 5$

$f_0(5,-) = a_{15} = 4$

$\boxed{i=1}$

$f_1(2,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{32} = 1+4 = 5$

$f_1(2,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{42} = 5+1 = 6$

$f_1(2,\{5\}) = f_0(5,-) + a_{52} = 4+2 = 6$

$f_1(3,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{23} = 3+5 = 8$

$f_1(3,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{43} = 5+3 = 8$

$f_1(3,\{5\}) = f_0(5,-) + a_{53} = 4+4 = 8$

$f_1(4,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{24} = 3+4 = 7$

$f_1(4,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{34} = 1+2 = 3$

$f_1(4,\{5\}) = f_0(5,-) + a_{54} = 4+1 = 5$

$f_1(5,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{25} = 5+3 = 8$

$f_1(5,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{35} = \underline{1+1} = 2$

$f_1(5,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{45} = 5+3 = 8$

$\boxed{i=2}$

$f_2(2, \{3,4\}) = \min\{f_1(3,\{4\}) + a_{32},\ f_1(4,\{3\}) + a_{42}\} =$

$= \min\{8+4,\ 3+1\} = 4 \quad (4)$

$f_2(2, \{3,5\}) = \min\{8+4,\ 2+2\} = 4 \quad (5)$

$f_2(2, \{4,5\}) = \min\{5+1,\ 8+2\} = 6 \quad (4)$

$f_2(3, \{2,4\}) = \min\{6+5,\ 7+3\} = 10 \quad (4)$

$f_2(3, \{2,5\}) = \min\{6+5,\ 6+4\} = 10 \quad (5)$

$f_2(3, \{4,5\}) = \min\{5+3,\ 8+4\} = 8 \quad (4)$

$f_2(4, \{2,3\}) = \min\{5+4,\ 8+2\} = 9 \quad (2)$

$f_2(4, \{2,5\}) = \min\{6+4,\ 6+1\} = 7 \quad (5)$

$f_2(4, \{3,5\}) = \min\{8\ 2,\ \underline{2+1}\} = 3 \quad (5)$

$f_2(5, \{2,3\}) = \min\{5+2,\ 8+1\} = 8 \quad (2)$

$f_2(5, \{2,4\}) = \min\{6+3,\ 7+3\} = 9 \quad (2)$

$f_2(5, \{3,4\}) = \min\{8+1,\ 3+3\} = 6 \quad (4)$

$\boxed{i=3}$

$f_3(2, \{3,4,5\}) = \min\{f_2(3,\{4,5\}) + a_{32},\ f_2(4,\{3,5\}) + a_{42},\ f_2(5,\{3,4\}) + a_{52}\} =$

$= \min\{8+4,\ \underline{3+1},\ 6+2\} = 4 \quad (4)$

$f_3(3, \{2,4,5\}) = \min\{6+5,\ 7+3,\ 9+4\} = 10 \quad (4)$

$f_3(4, \{2,3,5\}) = \min\{4+4,\ 10+2,\ 8+1\} = 8 \quad (4)$

$f_3(5, \{2,3,4\}) = \min\{4+3,\ 10+1,\ 9+3\} = 7 \quad (2)$

$$\min_{j=2,\dots,5} \{ f_3(j, \{2,3,4,5\} - \{j\}) + a_{j1} \} =$$

$$= \min \{ \underline{4+1}, 10+5, 8+3, 7+5 \} = 5 \; (2)$$

$$\boxed{\text{Άρα} \quad 1 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 3 \leftarrow 1}$$

2) ~~Ετ~~ Εταιρία παραγωγής χρωμάτων

Το ημερήσιο πρόγραμμα παραγωγής: κόκκινο, κίτρινο, Λευκό, Μαύρο,

Ποια η αλληλουχία για ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος καθαρισμού μηχανής

	(1) Λευκό	(2) Κίτρινο	(3) Μαύρο	(4) Κόκκινο
Λευκό(W)	∞	10	17	15
Κίτρινο(Y)	20	∞	19	12
Μαύρο(B)	50	44	∞	22
Κόκκινο(R)	45	40	20	∞

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το χρώμα } j \text{ ακολουθεί το χρώμα } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\min \; 10 X_{WY} + 17 X_{WB} + \dots + 20 X_{RB} + M(X_{WW} + X_{YY} + X_{BB} + X_{RR}$$

$X_{WW} + X_{WY} + X_{WB} + X_{WR} = 1$

$X_{YW} + X_{YY} + X_{YB} + X_{YR} = 1$

$X_{BW} + X_{BY} + X_{BB} + X_{BR} = 1$

$X_{RW} + X_{RY} + X_{RB} + X_{RR} = 1$

$X_{WW} + X_{YW} + X_{BY} + X_{RY} = 1$

$X_{WY} + X_{YY} + X_{BY} + X_{RY} = 1$

$X_{WB} + X_{YB} + X_{BB} + X_{RB} = 1$

$X_{WR} + X_{YR} + X_{BR} + X_{RR} = 1$

$\boxed{i=0}$

$f_0(2,-) = 10$

$f_0(3,-) = 17$

$f_0(4,-) = 15$

$\boxed{i=1}$

$f_1(2,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{32} = 17 + 44 = 61$

$f_1(2,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{42} = 15 + 40 = 55$

$f_1(3,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{23} = 10 + 19 = \underline{29}$

$f_1(3,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{43} = 15 + 20 = 35$

$f_1(4,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{24} = 10 + 18 = 28$

$f_1(4,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{34} = 17 + 22 = 31$

$\boxed{i=2}$

$f_2(2,\{3,4\}) = \min\{f_1(3\{4\}) + a_{32},\ f_1(4,\{3\}) + a_{42}\} =$

$= \min\{35 + 44,\ 39 + 40\} = 75$

$f_2(3,\{2,4\}) = \min\{f_1(2,\{4\}) + a_{23},\ f_1(4,\{2\}) + a_{43}\} =$

$= \min\{55 + 19,\ 28 + 20\} = \{74, 49\} = 49$

$f_2(4,\{2,3\}) = \min\{f_1(2,\{3\}) + a_{24},\ f_1(3,\{2\}) + a_{34}\} =$

$= \min\{71 + 18,\ \underline{29 + 22}\} = \underline{51}$

$$\min_{j=2,3,4} f_2(j, \{2,3,4\} - \{j\}) + a_{j1}]$$

$$= \min\{ f_2(2,\{3,4\}) + a_{21},\ f_2(3,\{2,4\}) + a_{31},\ f_2(4,\{3,2\}) + a_{41} \} =$$

$$= \min\{79+20,\ 48+50,\ \underline{51+45}\} = \underline{96}$$

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \omega \to Y \to B \to R \to \omega}$$

Μετατρέπω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε μεγιστοποίησης
Για να μην έχω το άπειρο το αντικαθιστώ με έναν τυχαίο μεγάλο αριθμό (π.χ 80)

$$\begin{pmatrix} -80 & -10 & -17 & -15 \\ -20 & -80 & -19 & -12 \\ -50 & -44 & -80 & -22 \\ -45 & -40 & -20 & -80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -70 & 0 & -7 & -5 \\ -2 & -62 & -1 & 0 \\ -28 & -22 & -58 & 0 \\ -25 & -20 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

αφαιρώ από κάθε γραμμή με το μεγαλύτερό της στοιχείο

$$\begin{pmatrix} -68 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & -62 & -1 & 0 \\ -26 & -22 & -58 & 0 \\ -24 & -20 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

αφαιρώ από κάθε στήλη με το μεγαλύτερό της στοιχείο και καλύπτω τα "0" με όσο το δυνατόν λιγότερες γραμμές.

$$\begin{pmatrix} -68 & 0^* & -7 & -27 \\ 0^* & -62 & -1 & -22 \\ -4 & 0 & -36 & 0^* \\ -24 & -20 & 0^* & -89 \end{pmatrix}$$

τον μετέτρεψα σε αυτόν τον πίνακα γιατί θέλω πίνακα 4x4 οπότε αφαιρώ το μεγαλύτερο από την γραμμή και τον προσθέτω στην διασταύρωση.

$X_{WY} = 1$ $X_{YW} = 1$

$X_{BR} = 1$ $X_{RB} = 1$

$X_{WY} + X_{YW} + X_{BR} + X_{RB} = 72$ κάτω φράγμα λύσης

3)

	1	2	3	4	5
1	∞	10	3	6	9
2	5	∞	5	4	2
3	4	9	∞	7	8
4	7	1	3	∞	4
5	3	2	6	5	∞

Θέλω να στείλω $X_{RB} \to 0 \Rightarrow$ κόστος $\to \infty$

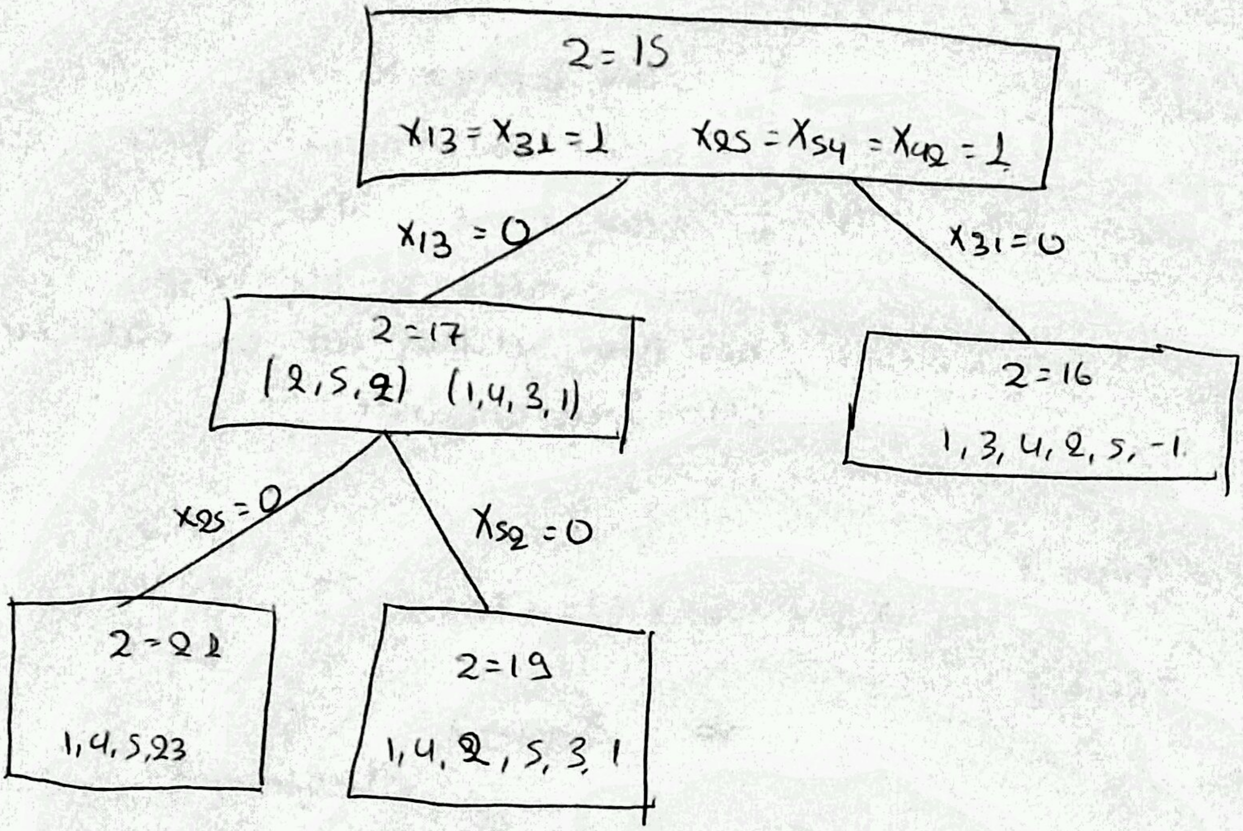
οπότε λύση $X_{WY} = 1$
$X_{YB} = 1$
$X_{BR} = 1$
$X_{RW} = 1$

με τιμή 96

ελέγχω και για $X_{BR} \to 0$ και παίρνω τιμή 98 άρα δεν βελτιώνω

~~Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της~~

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εκχώρησης



Άσκηση για το σπίτι.

Έχω ένα τραίνο και αναχωρεί από τον 1 για να ξεφορτώσει στους 2, 3, 4 σταθμούς. Το κόστος μετάβασης από τον i στον j εξαρτάται από το πλήθος u των σταθμών που προηγήθηκαν των i και j εκτός από τον 1 και δίνονται στον πίνακα:

	u=0			u=1		
i\j	2	3	4	2	3	4
1	30	34	42	–	–	–
2	–	33	46	–	34	40
3	40	–	52	35	–	41
4	48	43	–	44	37	–